# การอธิบายวิธีการหาค่ารากที่สองและรากที่สามโดยใช้ภาพเรขาคณิตประกอบ

# Geometrical Interpretation of Method for Square Root and Cubic Root Findings

**สุวิทย์ กิระวิทยา**

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมืองพิษณุโลก จังหวัดพิษณุโลก

อีเมล: suwitki@gmail.com

**บทคัดย่อ**

วิธีการคำนวณหาค่ารากที่สองของจำนวนจริงใด ๆ เป็นระเบียบวิธีที่มีการศึกษากันอย่างแพร่หลายในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น บทความแสดงถึงความเชื่อมโยงระหว่างวิธีการคำนวณดังกล่าวกับภาพทางเรขาคณิต เพื่อแสดงถึงที่มาและหลักการที่นำมาซึ่งระเบียบวิธีการคำนวณหาค่ารากที่สอง โดยจากการใช้ภาพทางเรขาคณิตนี้ทำให้เราสามารถขยายแนวคิดไปสู่การสร้างวิธีการหาค่ารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ ได้อีกด้วย

**คำสำคัญ:** ค่ารากที่สอง, ค่ารากที่สาม, ภาพทางเรขาคณิต

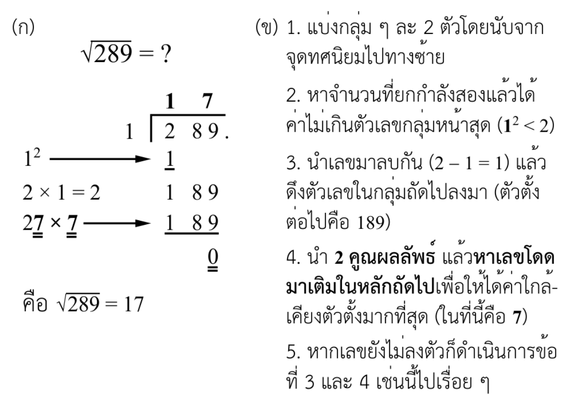
**Abstract**

The algorithm to calculate the square root of any real numbers has been widely studied in junior high school level. This paper describes the relation between the algorithm and geometric pictures in order to explain the origin of the applied steps in the square-root-finding algorithm. From the description, we can extend the concept to implement an algorithm to calculate the cubic root of any real numbers.

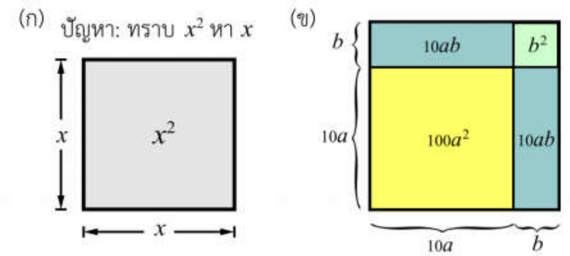
**Keywords:** Square root, Cubic root, Geometric picture

## 1. บทนำ

กระบวนการคำนวณเชิงตัวเลขเป็นทักษะพื้นฐานในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นมัธยมตอนต้น การหาค่ารากที่สองของจำนวนจริงใด ๆ ด้วยมือโดยวิธีตั้งหาร [1] เป็นระเบียบวิธีการหนึ่งซึ่งผู้ที่เรียนผ่านระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมาแล้วน่าจะได้ศึกษามาแล้ว โดยรูปที่ 1 แสดงตัวอย่างการคำนวณหาค่ารากที่สองของ $289$ (ซึ่งก็คือ $\sqrt{289} = 17$ นั่นคือ $289 = 17^2$) และขั้นตอนการคำนวณ โดยจากรูปที่ 1 (ข) จะเห็นได้ว่าในการดำเนินการหาค่ารากที่สองนั้น เรามีวิธีการดำเนินที่แตกต่างจากการตั้งหารยาวอยู่ 2 ประการคือ (1) เราจะต้องนำ 2 มาคูณกับผลลัพธ์ที่ได้ก่อนหน้านั้นและ (2) เราจะต้องหาเลขเพื่อมาเติมในหลักถัดไป ในขั้นต้นผู้ที่เรียนระเบียบวิธีการนี้จะใช้วิธีการท่องจำเพื่อให้สามารถนำไปใช้คำนวณค่าได้ บทความนี้จะแสดงให้เห็นถึงที่มาของวิธีการดำเนินการดังกล่าวโดยใช้ภาพทางเรขาคณิตประกอบการอธิบายเพื่อแสดงให้เห็นถึงที่มาของวิธีการคำนวณที่ใช้ โดยจากการใช้ภาพทางเรขาคณิตนี้ทำให้เราสามารถขยายแนวคิดไปสู่การสร้างวิธีการหาค่ารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ ได้อีกด้วย




**รูปที่ 1** (ก) ตัวอย่างการหาค่ารากที่สองของ 289 และ (ข) ขั้นตอนในการคำนวณค่ารากที่สอง




**รูปที่ 2** (ก) การตีความปัญหาการหาค่ารากที่สองเป็นภาพทางเราขาคณิต และ (ข) การแบ่งพื้นที่ภาพออกเป็นสี่ส่วน ($x = 10a + b$)

## 2. การอธิบายระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สอง

รูปที่ 2 (ก) แสดงการนำเสนอปัญหาการหาค่ารากที่สองในกรณีทั่วไปด้วยภาพทางเรขาคณิตสองมิติ คือ หากเราทราบค่า $x^2$ แล้ว เราต้องการทราบว่า ค่า $x$ เท่ากับเท่าใด โดยมองว่า $x^2$ คือพื้นที่ของสี่เหลี่ยมจตุรัสที่มีความยาวด้านคือ $x$ ดังนั้นในเบื้องต้นหากเราแบ่ง $x$ ในระบบเลขฐานสิบออกเป็นสองหลักคือ

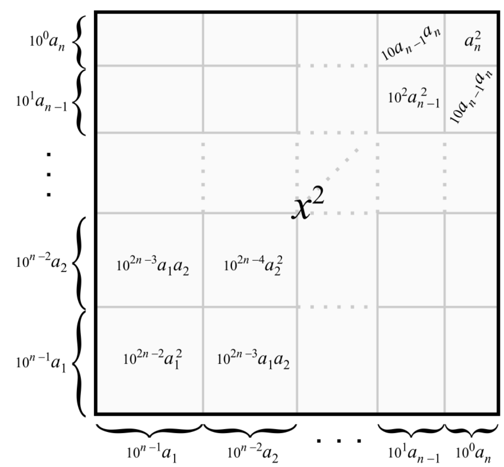
$$x = 10a + b \tag{1}$$

โดย $a$ และ $b$ คือตัวเลขโดด (มีค่าเท่ากับ 0, 1, 2, ... หรือ 9 เท่านั้น) ในหลักสิบและหลักหน่วยตามลำดับ เราจะสามารถแบ่งสี่เหลี่ยมจตุรัสที่เราทราบพื้นที่ (คือ $x^2$) ออกเป็นสี่ส่วนดังรูปที่ 2 (ข) หรือสามารถอธิบายด้วยสมการพหุนามกำลังสอง คือ

$$x^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2 \tag{2}$$

การหาจำนวนที่ยกกำลังสองแล้วได้ค่าไม่เกินตัวเลขกลุ่มหน้าสุดในขั้นตอนที่ 2 ในรูปที่ 1 (ข) นั้น คือการหาค่า $a$ ในรูปที่ 2 (ข) โดยพิจารณเฉพาะค่าตัวเลขในหลักสูงกว่าร้อย ($100a^2$) นั่นเอง โดยเมื่อได้ค่า $a^2$ แล้วเราจึงทำการลบออกจากค่าในหลักร้อยขึ้นไปของค่า $x^2$ ในขั้นตอนที่ 3 ในรูปที่ 1 (ข) ซึ่งจะทำให้ได้พื้นที่ ที่เหลืออยู่ 3 ส่วนที่มีขนาด $10ab$ สองส่วน และ $b^2$ หนึ่งส่วนนั่นเอง

การพิจารณาในลำดับถัดไปโดยการดึงตัวเลขสองหลักถัดลงไปมาพิจารณา เสมือนกับการนำค่า $a$ ที่หาได้มาคูณ 10 (=$10a$) และสำหรับการคูณด้วยสองนั้นเกิดจากความจริงที่ว่าพื้นที่




**รูปที่ 3** การพิจารณาเป็นภาพทางเรขาคณิตในกรณีทั่วไปของปัญหาการหาค่ารากที่สอง

ส่วนที่เหลือจาก $x^2 - 10^2a^2$ มีสองส่วนที่มีขนาด $10ab$ โดยจากความจริงที่ว่า

$$20ab + b^2 = (20a + b) \cdot b \tag{3}$$

นำมาซึ่งกระบวนการหาเลขโดด (คือค่าของ $b$) มาเติมในหลักถัดไป ซึ่งก็คือค่า $20a + b$ แล้วนำเลขนั้นมาคูณกับ $b$ เพื่อนำมาลบออกจากส่วนที่เหลือจาก $x^2 - 10^2a^2$ โดยสำหรับกรณีอย่างง่ายที่แสดงเป็นตัวอย่างในบทความนี้ (คือ $\sqrt{289} = 17$) การพิจารณาจะสิ้นสุดลงที่การหาค่า $b$

ในกรณีทั่วไป ซึ่งเป็นการหาค่ารากที่สองของจำนวนเต็มหลาย ๆ หลักเราสามารถแบ่งหรือบอกว่า $x$ เป็นจำนวน $n$ หลัก (โดยในเบื้องต้นเราละเลยการหาค่าตัวเลขหลังจุดทศนิยมของ $x$ ก่อน) นั่นคือเราพิจารณาให้

$$x = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \ldots + 10a_{n-1} + a_n \tag{4}$$

เราสามารถใช้การพิจารณาภาพทางเรขาคณิตที่บรรยายมาข้างต้นได้เช่นเดียวกัน โดยภาพในกรณี $n$ หลักนี้แสดงดังรูปที่ 3 การหาค่า $x$ จากค่า $x^2$ ก็ทำได้ในลักษณะการทำซ้ำเดิมในลำดับถัดไป ซึ่งหากเราต้องการหาค่าตัวเลขหลังจุดทศนิยมของ $x$ เรา

ก็สามารถทำได้โดยการพิจารณาเทอมที่มีตัวเลขยกกำลังติดลบของสิบซึ่งเป็นฐานของค่าตัวเลขที่เราพิจารณาด้วย

### 3. ระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สาม

จากแนวคิดในการอธิบายระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สองที่นำเสนอในหัวข้อที่แล้ว เราสามารถนำมาใช้สังเคราะห์ระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ ได้ ดังแสดงในรูปที่ 4 โดยรูปที่ 4 (ก) แสดงการตีความปัญหาการหาค่ารากที่สามด้วยรูปภาพทางเรขาคณิตสามมิติ คือ หากเราทราบค่า $x^3$ แล้วเราต้องการทราบว่า ค่า $x$ เท่ากับเท่าใด โดยการมองว่า $x^3$ คือปริมาตรของลูกบาศก์สี่เหลี่ยมที่มีความยาวในแต่ละด้านคือ $x$ ดังนั้นในเบื้องต้นหากเราแบ่ง $x$ ในระบบเลขฐานสิบออกเป็นสองหลักดังสมการที่ (1) เราจะต้องหาค่า $a$ ที่ทำให้ $a^3$ น้อยกว่าเลขในหลักพันขึ้นไปของค่า $x^3$ จากนั้นจึงทำการลบ $x^3$ ออกด้วย $10^3a^3$ แล้วนำเลขในสามหลักถัดไปมาพิจารณาด้วย โดยเราจะต้องคำนวณหาค่า $b$ ที่ทำให้ $(300a^2 + 30ab + b^2)\cdot b$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $x^3 - 10^3a^3$

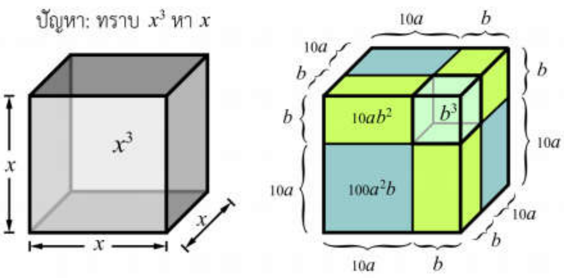
ระเบียบวิธีที่นำเสนอนี้ได้มาจากการพิจารณาวิเคราะห์ปริมาตรของส่วนต่าง ๆ ของภาพในรูปที่ 4 (ข) หรือการวิเคราะห์สมการพหุนามกำลังสาม คือ

$$x^3 = (10a+b)^3 = 10^3a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 \quad (5)$$

ในการพิจารณาตัวเลขจำนวนจริง $x^3$ ใด ๆ นั้นเราสามารถทำกระบวนการหารากที่สามที่กล่าวมาข้างต้นนี้โดยการหาค่าตัวเลขโดดในลำดับถัดไปเรื่อย ๆ ซึ่งทำให้ได้ระเบียบวิธีการหารากที่สามดังเช่นที่แสดงในแหล่งอ้างอิงอื่น ๆ เช่น [2] และ [3]

### 4. สรุป

ในบทความนี้ ระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สองได้ถูกนำเสนอและอธิบายในรูปแบบของภาพทางเรขาคณิตสองมิติและสมการพหุนาม โดยตัวอย่างที่นำเสนอในบทความนี้เป็นตัวเลขสองหลักเพื่อให้สามารถเชื่อมโยงกับภาพที่แสดงได้




**รูปที่ 4** (ก) การตีความปัญหาการหาค่ารากที่สามเป็นภาพทางเราขาคณิต และ (ข) การแบ่งปริมาตรของส่วนต่าง ๆ ในภาพออกเป็นแปดส่วน ($x = 10a + b$)

โดยง่าย ซึ่งภาพนี้สามารถขยายไปสู่กรณีการหารากที่สองของจำนวนจริงทั่วไปได้ จากแนวคิดการหาค่ารากที่สองที่นำเสนอนี้เราสามารถนำไปพิจารณาสร้างระเบียบวิธีการหาค่ารากที่สามของตัวเลขใด ๆ ต่อไปได้

การต่อยอดผลงานนี้อาจเป็นการพิจารณาการหาระเบียบวิธีการหาค่ารากของจำนวนจริงใด ๆ ในลำดับสูงขึ้นต่อไป (คือหาค่า $x$ เมื่อทราบค่า $x^n$) การหาระเบียบวิธีการหารากของจำนวนเชิงซ้อน การนำเสนอเชิงเรขาคณิตของลูกบาศก์ไฮเปอร์ (hypercube) หรือการหาระเบียบที่มีประสิทธิภาพในการคำนวณหาค่ารากต่าง ๆ ต่อไป

### กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณเด็กชายพสุ กิระวิทยา ผู้ซึ่งเป็นแรงบันดาลใจในการนำเสนอบทความนี้

### เอกสารอ้างอิง

[1] วินิจ วงศ์รัตนะ, คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.1-2-3, กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, 2556

[2] http://www.wikihow.com/Calculate-Cube-Root-by-Hand

[3] http://mathforum.org/library/drmath/view/52605.html