บันทึกเกี่ยวกับ โจทย์การหาปริพันธ์ กับตัวแปรเชิงซ้อน

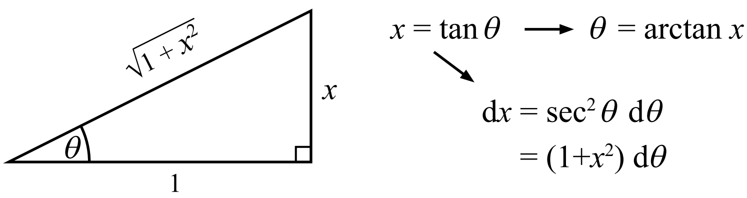
สุวิทย์ กิระวิทยา

October 7, 2022

วันนี้นึกถึงโจทย์คณิตศาสตร์ข้อหนึ่งที่เคยเรียนตอนเป็นนิสิต และคิดว่าน่าสนใจ จึงเขียนเป็นบันทึกไว้ ณ ที่นี้ เริ่มต้น เชื่อว่า หลายคน คงเคยทราบว่า

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x \tag{1}$$

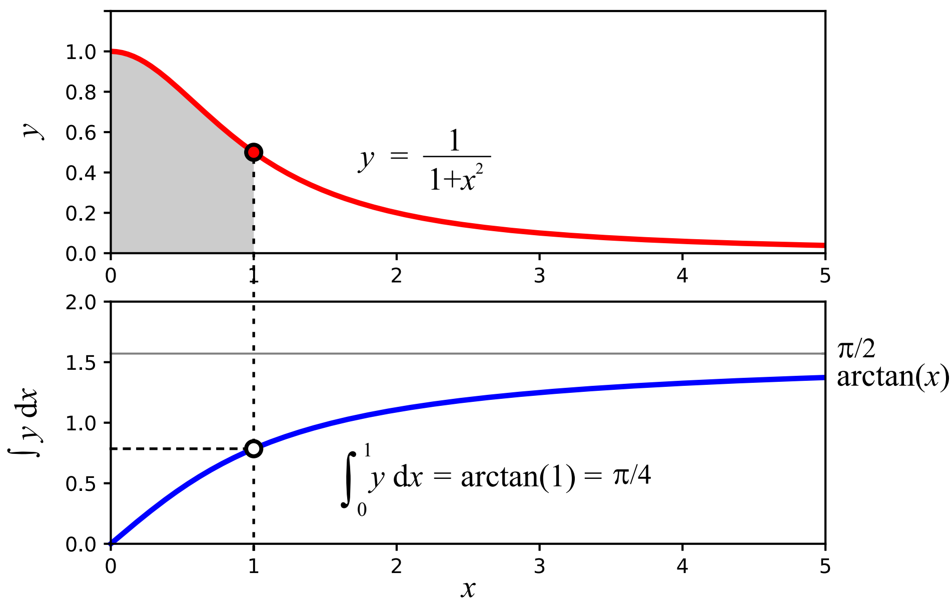
โดยการหาปริพันธ์ข้างต้น สามารถทำได้โดยง่าย คือ การเปลี่ยนตัวแปร x เป็น θ โดยใช้การวาดรูปสามเหลี่ยมประกอบ และใช้ความรู้ที่มีมาก่อน คือ $\mathrm{d}\tan\theta = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ ดังแสดงในรูป



ซึ่งจากรูปสามเหลี่ยมที่วาด เราสามารถเขียนวิธีการหาปริพันธ์ได้อย่างชัดแจ้งคือ

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,(1+x^2)\,\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{d}\theta = \theta = \arctan x \tag{2}$$

การตีความการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันนี้ อาจแสดงได้ด้วยรูปภาพ โดยให้ $y = \frac{1}{1+x^2}$ แล้วพล็อตกราฟดู



ถึงตรงนี้ หลายท่านอาจคิดว่า ไม่มีอะไรพิเศษสำหรับปัญหานี้ แต่ความน่าสนใจจะเกิดขึ้น หากเราแยกตัวประกอบเทอม x^2+1 เป็น $(x+j)(x-j)$ ก่อน ($j=\sqrt{-1}$) แล้วใช้การแยกเศษส่วนย่อย แล้วค่อยทำการหาปริพันธ์ จะได้ผลคือ

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+j)(x-j)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{j}{2(x+j)} - \frac{j}{2(x-j)}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{j}{2}\ln(x+j) - \frac{j}{2}\ln(x-j) \\
&= \frac{j}{2}\ln\left(\frac{x+j}{x-j}\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

หากเทียบสมการที่ (2) และ สมการที่ (3) เราคงบอกว่า

$$\arctan x \stackrel{?}{=} \frac{j}{2}\ln\left(\frac{x+j}{x-j}\right) \qquad (4)$$

ซึ่งสิ่งที่พบนี้ เราอาจคิดว่าเป็นไปได้ที่เรามีเอกลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ตัวใหม่ในลักษณะเดียวกับ เอกลักษณ์ของออยเลอร์ ($e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$) ที่แสดงความเชื่อมโยงระหว่าง ฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียล ผ่านตัวแปรเชิงซ้อน โดยในกรณีนี้คือการเชื่อมโยงฟังก์ชันตรีโกณมิติ (อินเวอร์ส) และฟังก์ชันล็อกการิทึม แต่หากลองแทนค่าเพื่อตรวจสอบสมการที่ (4) ดู เราจะพบอะไรที่น่าสงสัย ตัวอย่างเช่นหากแทนค่าที่ $x=1$ จะได้ผลจากสมการที่ (2) และผลที่แสดงในรูปกราฟ คือ $\arctan(1)=\pi/4$ แต่หากแทนใน สมการที่ (3) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{j}{2}\ln\left(\frac{1+j}{1-j}\right) &= \frac{j}{2}\left(\ln\left|\frac{1+j}{1-j}\right| + j\arg\frac{1+j}{1-j}\right) \\
&= \frac{j}{2}\left(\ln(1) + j\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

โดยการคำนวณข้างบนนี้ เราใช้นิยามของฟังก์ชันล็อกสำหรับตัวแปรเชิงซ้อน (จากวิกิพีเดีย https://en.wikipedia.org/wiki/Complex_logarithm) คือ

$$\ln z = \ln|z| + j\arg z \qquad (6)$$

ถึงตรงนี้ หากผู้ที่จำนิยามและคุณสมบัติของการหาปริพันธ์ และ/หรือ ฟังก์ชันเชิงซ้อนได้ ก็คงบอกได้แล้วว่า ทำไมผลลัพธ์ที่ได้จากสมการที่ (3) นั้นต่างจากสมการที่ (2) (คือ ได้ $-\pi/4$ แทนที่จะเป็น $\pi/4$ สำหรับกรณี $x=1$) และคงแก้ไขให้ถูกต้องได้[1] แต่เรื่องนี้ก็ยังคงเป็นเรื่องที่ท้าทายนักวิทยาศาสตร์และวิศวกรที่ต้องใช้ตัวแปรเชิงซ้อนในการทำงานต่อไป เพราะผู้ใช้จะต้องตรวจสอบผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ให้ถูกต้องก่อนที่จะนำไปใช้ต่อ!

[1] **คือ** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$