

บันทึกเรื่องหนึ่งเกี่ยวกับ อินเวอร์สของเมทริกซ์ที่คุณกัณอยู่

สุวิทย์ กิระวิทยา

December 26, 2018

บันทึกนี้เป็นการบรรยายสั้น ๆ เรื่องเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ (ที่เคยคุยกับให้ถูกฟังเมื่อนานมาแล้ว เมื่อต้นปี 2018) ซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติการคูณของเมทริกซ์ ที่ไม่เหมือนกับการคูณเลขปกติ โดยได้กล่าวถึงการดำเนินการผกกลับหรืออินเวอร์ส (inverse) คือ

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (1)$$

เนื่องจากว่า เมทริกซ์เหล่านี้ สามารถมองได้ว่าเป็นตัวแทนของ ตัวดำเนินการ (operator) ซึ่งมีคุณสมบัติที่ขึ้นกับลำดับ โดยในสมัยมัธยมเราเคยเห็นการพิสูจน์ ว่าสมการ (1) นี้เป็นจริงแล้ว คือ หากให้ $M = A \cdot B$ และ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M \cdot M^{-1} &= I \\ (A \cdot B) \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= I \\ A^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= A^{-1} \cdot I \\ ((A^{-1} \cdot A) \cdot B) \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= A^{-1} \cdot I \\ (I \cdot B) \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= A^{-1} \cdot I \\ B \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= A^{-1} \cdot I \\ (B^{-1} \cdot B) \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot I \\ I \cdot ((A \cdot B)^{-1}) &= B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot I \\ (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

หากอธิบาย สมการ (1) เหมือนกับการดำเนินการใด ๆ เช่นกิจกรรมในชีวิตประจำวัน อาจเทียบได้ว่า A เป็นการใส่รองเท้า และ B เป็นการใส่ถุงเท้า โดยที่เท้าเปล่า ๆ คือ X เมื่อเราต้องการใส่ถุงเท้า เราก็ต้องให้ตัวดำเนินการ B มากระทำก่อน คือ

$$\text{ใส่ถุงเท้า} \rightarrow B \cdot X$$

และเมื่อต้องการใส่รองเท้า (หลังจากที่ใส่ถุงเท้าเสร็จแล้ว) ก็คือ

$$\text{ใส่รองเท้าและรองเท้า} \rightarrow A \cdot B \cdot X$$

การอินเวอร์ส (inverse) ก็คือ การถอด คือ หากเรามีเท้าที่ใส่ถุงเท้าและรองเท้าอยู่ เราจะต้องถอดรองเท้าก่อน คือ

$$\text{ถอดรองเท้า} \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot X$$

แล้วจากนั้นจึงถอดถุงเท้า ซึ่งก็จะเหลือเท้าเปล่า ๆ คือ X ซึ่งเขียนเป็นภาษาคณิตศาสตร์ได้ คือ

$$\text{ถอดถุงเท้าหลังจากถอดรองเท้า} \rightarrow B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot X = X$$

โดยการดำเนินการ (การกระทำ) ทั้งหมดนี้ เราสามารถจัดกลุ่ม หรือ ใส่วงเล็บให้มันได้อย่างอิสระ ดังนั้น จึงเขียนได้ว่า

$$X = (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) \cdot X \quad (2)$$

และ เราจึงบอกได้ว่า การถอดรองเท้าแล้วจึงถอดถุงเท้า (คือ $B^{-1} \cdot A^{-1}$) เป็นการกระทำที่ผกกลับกับการใส่ถุงเท้าแล้วจึงใส่รองเท้า (คือ $A \cdot B$) โดยมีเท้าเรา คือ X (สิ่งที่ถูกกระทำ) และ เราสามารถบอกได้ว่า $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ดังแสดงในสมการ (1)